École Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra

Année universitaire 2016-2017
Semestre 4

Examen Traitement de Signal

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements seront évaluées sur 2 points. Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage.

Note: Aucune table de formules n'est nécessaire pour cet examen.

Exercice 1 **(6 points)**

1. Démontrer la formule de cours donnant la transformée de Laplace d'un signal périodique de période $T > 0$.

2. **Application:** Calculer la transformée de Laplace de f, où f est le signal périodique représenté par la figure 1.

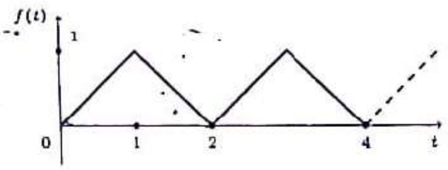

Fig. 1

Exercice 2 **(12 points)** Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$.

1. Donner, sans démonstration, la transformée de Laplace de $f(t) = t^n$, $t \geq 0$.

2. En déduire la transformée de Laplace inverse de $F(p) = \frac{1}{(p+a)^n}$, où $a, p \in \mathbb{C}$ tels que $\text{Re}(p + a) > 0$.

3. En utilisant la question précédente, donner la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^n \cos(bt)$ pour $b \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(p) > 0$.

4. Ici on prend $n = 1$ et $b = 1$ et on considère l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = g(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

On suppose que la solution y de l'équation différentielle (1) est une fonction de classe C^1 ayant, ainsi que sa dérivée, une transformée de Laplace définie dans le domaine complexe $\text{Re}(p) > 0$. On suppose de plus que $y(0) = 0$.

En utilisant la transformée de Laplace inverse, calculer l'expression de $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Université Ibn Tofail

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra

Année universitaire 2016-2017
Semestre 4

Rattrapage Traitement de Signal

(Durée 1H)

La présentation des copies et la précision des raisonnements seront évaluées sur 2 points. Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage.

Note: Aucune table de formules n'est nécessaire pour cet examen.

Exercice

Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

où l'inconnue est la fonction y.

1. On suppose dans cette question que g est une fonction périodique de période $T = 2\pi$.
   (a) Calculer les coefficients de Fourier complexes de y en fonction de ceux de g.
   (b) En déduire que l'équation (1) n'admet aucune solution 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ si
   $$\int_0^{2\pi} g(t)e^{-it}dt \neq 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^{2\pi} g(t)e^{it}dt \neq 0.$$
2. On suppose dans cette question que g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (a) On suppose que la solution y de l'équation différentielle (1) ainsi que ses dérivées premières et secondes sont des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.
   Calculer la transformée de Fourier de y en fonction de celle de g.
   Quelle est l'expression de la transformée de Fourier de y si $g(t) = e^{-t^2}$.
3. On suppose dans cette question que $g(t) = t^2e^{-t}H(t)$ où H est la fonction de Heaviside
   On suppose que la solution y de l'équation différentielle (1) est une fonction causale admettant, ainsi que ses dérivées premières et secondes, une transformée de Laplace définie dans le domaine complexe $\mathrm{Re}(p) > a$, pour un certain $a > 0$. On suppose de plus que $y'(0) = y(0) = 0$.
   Calculer l'expression de $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.